文章编号:1005-3085(2009)06-1097-06

Borg-Levinson 定理新证*

傅守忠[1,2]， 徐宗本[1]， 魏广生[1,3]

(1- 西安交通大学应用数学研究中心及信息与系统科学研究所，西安 710049;
2- 肇庆学院计算机学院，肇庆 526061; 3- 陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062)

摘 要: 对于Sturm-Liouville特征值逆问题，Borg-Levinson定理描述了Sturm-Liouville算子的两组谱可唯一确定其势函数。本文利用整函数的Liouville定理，并通过对谱参数趋于无穷时Sturm-Liouville方程基本解的渐进估计，给出了Borg-Levison定理一个简单的证明。同时还证明了Sturm-Liouville算子的两组谱与其Weyl-Titchmarsh m-函数及谱函数三者之间的等价关系。

关键词: 特征值；逆问题；Sturm-Liouville算子

分类号: **AMS**(2000) 34B09; 34L15; 47E05 **中图分类号**: O175.3 **文献标识码**: A

1 引言

Sturm-Liouville特征值问题

$$\begin{cases} Eq(q): & L(q)y=-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), & x\in[0,1], \\ BC_1(\alpha): & y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0, & \alpha\in[0,\pi), \\ BC_2(\beta): & y(1)\cos\beta+y'(1)\sin\beta=0, & \beta\in[0,\pi), \end{cases} \tag{1}$$

其中$q\in L^1[0,1]$称为势函数，起源于固体热传导模型，其应用已涉足于数学物理、工程技术及各类应用和理论科学，特别是在量子力学中，它是描述微观粒子状态的基本数学手段。因此，一个多世纪以来，常微分算子理论已逐步形成了数学和物理学界的一个重要的理论研究分支。熟知，其谱$\sigma\ (q,\ \alpha,\ \beta)$有如下经典性质。

性质1 $\sigma\ (q,\ \alpha,\ \beta)=\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$为可数单重下半有界的纯特征值集合，可排列为

$$\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots\to+\infty. \tag{2}$$

性质2 记$\sigma\ (q,\ \alpha,\ \beta_1)=\{\lambda_{1n}\}_{n=0}^{+\infty}$，$\sigma\ (q,\ \alpha,\ \beta_2)=\{\lambda_{2n}\}_{n=0}^{+\infty}$，当$\beta_1<\beta_2$时，

$$\lambda_{10}<\lambda_{20}<\lambda_{11}<\lambda_{21}<\cdots<\lambda_{1n}<\lambda_{2n}<\cdots. \tag{3}$$

Sturm-Liouville特征值逆问题是Sturm-Liouville理论中的一个重要分支，它主要研究由怎样的特征值信息能确定微分方程的系数函数，进而将其重构。由于在量子力学及工程领域中，唯一可以(或最易)观测到的物理量是特征值或叫本征值，它对应着量子体系中的跃迁能量或结构力学中的振动频率等，所以这类问题极为重要。1946年，Borg[1]给出Sturm-Liouville特征值逆问题一个初始结果，Levinson[2]于1949年将其推广，得到以下定理。

收稿日期: 2007-10-12. **作者简介**: 傅守忠(1966年2月生)，男，硕士，副教授. 研究方向：常微分算子.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10771165)；广东省自然科学基金(04011600)；陕西省自然科学基金(2005A04).

定理 1 (Borg-Levinson) 两组谱

$$\sigma(q,\,\alpha,\,\beta_1)=\{\lambda_{1n}\}_{n=0}^{+\infty},\quad \sigma(q,\,\alpha,\,\beta_2)=\{\lambda_{2n}\}_{n=0}^{+\infty},$$

当 $\beta_1\neq\beta_2$ 时可唯一确定势函数 $q(x)\in L^1[0,1]$。

这里的“唯一确定”是指不存在另外的势函数 $\widetilde{q}$ 与它具有同样的谱，即若 $\widetilde{q}\in L^1[0,1]$ 使得 $\sigma(q,\,\alpha,\,\beta_1)=\sigma(\widetilde{q},\,\alpha,\,\beta_1)$，且 $\sigma(q,\,\alpha,\,\beta_2)=\sigma(\widetilde{q},\,\alpha,\,\beta_2)$，则必有 $\widetilde{q}=q$(a.e.)。该定理可简述为“两组谱可唯一确定 Sturm-Liouville 方程中的势函数”。这一结果奠定了逆谱问题的基础，之后产生大量有关确定性的后续结果[3,6-11,13]。

本文旨在简化 Borg 的证明。在第 2 节中，利用相似变换算子的结果和整函数的性质，给 Borg-Levinson 定理以新的证明；在第 3 节中给出确定性的两类经典充分条件间的等价性。

2 Borg 定理的解析证明

本节将给出 Borg 定理的一种解析证明。

证明 定理中的唯一确定性可转化为“同一性”问题，即若 $q_1(x),\,q_2(x)\in L^1[0,1]$，满足

$$\sigma\left(q_1,\,\alpha,\,\beta_1\right)=\sigma\left(q_2,\,\alpha,\,\beta_1\right)=\{\lambda_{1n}\}_{n=0}^{+\infty}$$

且

$$\sigma\left(q_1,\,\alpha,\,\beta_2\right)=\sigma\left(q_2,\,\alpha,\,\beta_2\right)=\{\lambda_{2n}\}_{n=0}^{+\infty},$$

则 $q_1=q_2$(a.e.)。

设方程 $Eq(q_1)$ 和 $Eq(q_2)$ 满足初始条件

$$y(0)=\sin\alpha,\quad y'(0)=-\cos\alpha \tag{4}$$

的解分别为 $u_1(x,\lambda)$ 和 $u_2(x,\lambda)$，则由 Levitan[4] 的相似变换可知，它们有如下的表达形式

$$u_j(x,\lambda)=\begin{cases}\sin\alpha\left[\cos\sqrt{\lambda}\,x+\int_0^x K_j(x,t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,\mathrm{d}t\right], & \alpha\neq 0\\ -\sin\sqrt{\lambda}\,x/\sqrt{\lambda}-\int_0^x K_j(x,t)\sin\sqrt{\lambda}\,x/\sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}t, & \alpha=0\end{cases} \tag{5}$$

且是 λ 的整函数，其中核函数 $K_j(x,t)$ 在三角形区域 $0\leq t\leq x\leq 1$ 上连续。进而可得到估计式 (也可参见 Titchmarsh[12])

$$u_j(x,\lambda)=\begin{cases}\sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}\,x+O(\mathrm{e}^{\tau x}/\sqrt{\lambda}), & \alpha\neq 0\\ -\sin\sqrt{\lambda}\,x/\sqrt{\lambda}+O(\mathrm{e}^{\tau x}/\lambda), & \alpha=0\end{cases} \tag{6}$$

及

$$u_j'(x,\lambda)=\begin{cases}-\sqrt{\lambda}\sin\alpha\sin\sqrt{\lambda}\,x+O(\mathrm{e}^{\tau x}), & \alpha\neq 0\\ -\cos\sqrt{\lambda}\,x+O(\mathrm{e}^{\tau x}/\sqrt{\lambda}), & \alpha=0\end{cases} \tag{7}$$

$j=1,2$，其中 $\tau=|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|$。由于对任意的 $\lambda\in\mathbf{C}$，

$$\begin{pmatrix} L(q_1)u_1(x,\lambda)\\ L(q_2)u_2(x,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda u_1(x,\lambda)\\ \lambda u_2(x,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{8}$$

所以

$$\begin{vmatrix} L(q_1)u_1(x,\lambda) & u_1(x,\lambda) \\ L(q_2)u_2(x,\lambda) & u_2(x,\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda u_1(x,\lambda) & u_1(x,\lambda) \\ \lambda u_2(x,\lambda) & u_2(x,\lambda) \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

展开左端的行列式，在区间 [0,1] 上积分，再应用分部积分，并注意到 $u_1(x,\lambda)$ 和 $u_2(x,\lambda)$ 在 0 点满足同样的初始条件，可得

$$u_1(1,\lambda)u_2'(1,\lambda) - u_1'(1,\lambda)u_2(1,\lambda) - \int_0^1 \big(q_1(x) - q_2(x)\big)u_1(x,\lambda)u_2(x,\lambda)\mathrm{d}x = 0. \tag{10}$$

记

$$Q(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad H(\lambda) = \int_0^1 Q(x)u_1(x,\lambda)u_2(x,\lambda)\mathrm{d}x.$$

易见

$$H(\lambda_{jk}) = 0, \quad j = 1,2, \quad k = 0,1,\cdots. \tag{11}$$

若令

$$\omega_j(\lambda) = u_1(1,\lambda)\cos\beta_j + u_1'(1,\lambda)\sin\beta_j, \quad j = 1,2, \tag{12}$$

则 $\omega_j(\lambda)$ 的零点构成的集合恰好是

$$\sigma(q_1, \alpha, \beta_j) = \{\lambda_{jn}\}_{n=0}^{+\infty}, \quad j = 1,2,$$

即 $\omega_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ 的零点均是 $H(\lambda)$ 的零点。再注意到引理 1 和引理 2，便知

$$\psi(\lambda) = H(\lambda)/(\omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda))$$

是整函数。

由 (6) 可得

$$|u_j(x,\lambda)| \le \begin{cases} |\sin\alpha|\mathrm{e}^{\tau} + O(\mathrm{e}^{\tau}/|\sqrt{\lambda}|), & \alpha \ne 0 \\ \mathrm{e}^{\tau}/|\sqrt{\lambda}| + O(\mathrm{e}^{\tau}/|\lambda|), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{13}$$

从而由 Hölder 不等式，有

$$|H(\lambda)| \le \begin{cases} A\sin^2\alpha\mathrm{e}^{2\tau} + O(\mathrm{e}^{2\tau}/|\sqrt{\lambda}|), & \alpha \ne 0 \\ A\mathrm{e}^{2\tau}/|\lambda| + O(\mathrm{e}^{2\tau}/|\lambda^{3/2}|), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{14}$$

其中

$$A = \int_0^1 |q_1(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |q_2(x)|\mathrm{d}x$$

是常数。将 (6) 和 (7) 代入 (12)，整理后得

$$|\omega_j(\lambda)| = |u_1(1,\lambda)\cos\beta_j + u_1'(1,\lambda)\sin\beta_j| = \begin{cases} |\sqrt{\lambda}|\sin\alpha\mathrm{e}^{\tau} + O(\mathrm{e}^{\tau}), & \alpha \ne 0 \\ \mathrm{e}^{\tau} + O(\mathrm{e}^{\tau}/|\sqrt{\lambda}|), & \alpha = 0, \end{cases}, \tag{15}$$

$j=1,2$。于是

$$
|\psi(\lambda)| = |H(\lambda)|/(|\omega_1(\lambda)||\omega_2(\lambda)|) \le \begin{cases} \frac{A\sin^2\alpha e^{2\tau}+O(e^{2\tau}/\sqrt{\lambda})}{|\lambda|\sin^2\alpha e^{2\tau}+O(|\sqrt{\lambda}|e^{2\tau})}, & \alpha\neq 0 \\ \frac{Ae^{2\tau}/|\lambda|+O(e^{2\tau}/\lambda^{3/2})}{e^{2\tau}+O(e^{2\tau}/|\sqrt{\lambda}|)}, & \alpha=0. \end{cases}
$$

$$
= O\Big(\frac{1}{|\lambda|}\Big) \tag{16}
$$

因而当 $|\lambda|\to+\infty$ 时，$|\psi(\lambda)|\to 0$，由 Liouville 定理有 $\psi(\lambda)\equiv 0$，即有 $H(\lambda)\equiv 0$。

由 (5)，经过交换积分次序和简单合并可以得到

$$
u_1(x,\lambda)u_2(x,\lambda)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\sin^2\alpha}{2}\big[1+\cos 2\sqrt{\lambda}x+\int_0^x M(x,t)\cos 2\sqrt{\lambda}t\mathrm{d}t\big], & \alpha\neq 0 \\ -\frac{1}{2\lambda}\big[-1+\cos 2\sqrt{\lambda}x+\int_0^x M(x,t)\cos 2\sqrt{\lambda}t\mathrm{d}t\big], & \alpha=0 \end{cases}. \tag{17}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
0 &= H(\lambda)=\int_0^1 Q(x)u_1(x,\lambda)u_2(x,\lambda)\mathrm{d}x \\
&= B(\lambda)\Big(\pm\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 Q(x)\Big[\cos 2\sqrt{\lambda}x+\int_0^x M(x,t)\cos 2\sqrt{\lambda}t\mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}x\Big),
\end{aligned} \tag{18}
$$

其中

$$
B(\lambda)=\begin{cases} \frac{\sin^2\alpha}{2}, & \alpha\neq 0 \\ -\frac{1}{2\lambda}, & \alpha=0 \end{cases}, \tag{19}
$$

即

$$
\pm\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 Q(x)\Big[\cos 2\sqrt{\lambda}x+\int_0^x M(x,t)\cos 2\sqrt{\lambda}t\mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}x=0,\quad \forall\,\lambda\in\mathbf{C}, \tag{20}
$$

交换积分顺序，有

$$
\pm\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}t\Big[Q(t)+\int_x^1 Q(x)M(x,t)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t=0,\quad \forall\,\lambda\in\mathbf{C}. \tag{21}
$$

令 $\lambda\to+\infty$，得 $\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x=0$。故

$$
\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}t\Big[Q(t)+\int_x^1 Q(x)M(x,t)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t=0,\quad \forall\,\lambda\in\mathbf{C}. \tag{22}
$$

由 $\{\cos 2\sqrt{\lambda}t\,|\,\lambda\in\mathbf{R}\}$ 在 $L^1[0,1]$ 中的完备性，知

$$
Q(t)+\int_x^1 Q(x)M(x,t)\mathrm{d}x=0, \tag{23}
$$

再由 Volterra 方程解的唯一性有 $Q(x)\equiv 0$，即 $q_1(x)\equiv q_2(x)$。 **证毕**

3　确定 Weyl-Titchmarsh m-函数

定理 2　两组谱

$$\sigma(q,\,\alpha,\,\beta_1)=\{\lambda_{1n}\}_{n=0}^{+\infty},\quad \sigma(q,\,\alpha,\,\beta_2)=\{\lambda_{2n}\}_{n=0}^{+\infty},\quad \beta_1\neq\beta_2$$

可唯一确定 Weyl-Titchmarsh m-函数 $m(\lambda)=u'(1,\lambda)/u(1,\lambda)$，其中 $u(x,\lambda)$ 是 (1) 中方程 $Eq(q)$ 满足初值条件 (4) 的基本解。

证明　同样化为“同一性”问题来证明，且分别记对应于 $q_1(x)$ 和 $q_2(x)$ 的 Weyl-Titchmarsh m-函数为 $m_1(\lambda)$ 和 $m_2(\lambda)$。

令

$$g_j(\lambda)=\frac{u_j(\pi,\lambda)\cos\beta_1+u_j'(\pi,\lambda)\sin\beta_1}{u_j(\pi,\lambda)\cos\beta_2+u_j'(\pi,\lambda)\sin\beta_2}, \tag{24}$$

则 $g_j(\lambda)$ 的零点集恰好是 $\sigma(q_j,\,\alpha,\,\beta_1)$，而其极点集又恰为 $\sigma(q_j,\,\alpha,\,\beta_2)$, $j=1,2$。又由 (6) 和 (7)，当 $\lambda\to\infty$ 时，有渐进式

$$g_j(\lambda)=\begin{cases}\cos\beta_1/\cos\beta_2+O(1/\sqrt{\lambda}), & \cos\beta_1\cos\beta_2\neq0,\\ -1/(\sqrt{\lambda}\cos\beta_2\sin\alpha)+O(1/\lambda), & \cos\beta_1=0,\\ -\sqrt{\lambda}\cos\beta_1\sin\alpha+O(1/\sqrt{\lambda}), & \cos\beta_2=0,\end{cases} \tag{25}$$

$j=1,2$。由定理的假设及基本解的性质有 $F(\lambda)=g_1(\lambda)/g_2(\lambda)$ 为整函数，且由渐进式 (25) 可得 $\lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda)=1$，再由 Liouville 定理知 $F(\lambda)$ 为常数，从而就有 $F(\lambda)\equiv1$，即 $g_1(\lambda)\equiv g_2(\lambda)$。而

$$g_j(\lambda)=\frac{\cos\beta_1+\frac{u_j'(\pi,\lambda)}{u_j(\pi,\lambda)}\sin\beta_1}{\cos\beta_2+\frac{u_j'(\pi,\lambda)}{u_j(\pi,\lambda)}\sin\beta_2}=\frac{\cos\beta_1+m_j(\lambda)\sin\beta_1}{\cos\beta_2+m_j(\lambda)\sin\beta_2}, \tag{26}$$

从 (26) 可解得

$$m_j(\lambda)=-\frac{\cos\beta_1-g_j(\lambda)\cos\beta_2}{\sin\beta_1-g_j(\lambda)\sin\beta_2}, \tag{27}$$

$j=1,2$。于是就有 $m_1(\lambda)\equiv m_2(\lambda)$。　**证毕**

注　注意到 Weyl-Titchmarsh m-函数可确定势函数的结果 (参见文 [4] 或文 [11])，定理 2 给出 Borg 定理一种更为简单的证明。

Levitan[4] 证明了 Weyl-Titchmarsh m-函数 $m(\lambda)$ 与谱函数 $\rho(\lambda)$ 可以相互确定。又知谱函数 $\rho(\lambda)$ 可以确定所有的谱，结合定理 2 可得定理 3。

定理 3　两组谱 $\sigma(q,\,\alpha,\,\beta_1)\cup\sigma(q,\,\alpha,\,\beta_2)(\beta_1\neq\beta_2)$，谱函数 $\rho(\lambda)$ 和 Weyl-Titchmarsh m-函数 $m(\lambda)$ 三者等价。

参考文献：

[1] Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe[J]. Acta Mathematica, 1946, 78: 1-96
[2] Levinson N. The inverse Sturm-Liouville problem[J]. Matematisk Tidsskrift B, 1949, 25: 25-30
[3] Hochstadt H, Lieberman B. An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1978, 34: 676-680
[4] Levitan B M. Inverse Sturm-Liouville Problem[M]. Utrecht: VNU Science Press, 1987
[5] Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems[M]. New York: Springer-Verlag, 1999
[6] Gesztesy F, Simon B. Inverse spectral analysis with partial information on the potential, II The case of discrete spectrum[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2000, 352: 2765-2787
[7] Gesztesy F, Del Rio R, Simon B. Inverse spectral analysis with partial information on the potential, III Updating boundary conditions[J]. International Mathematica Research Notices, 1997, 15: 751-758
[8] Horváth M. On the inverse spectral theory of Schrödinger and Dirac operators[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2001, 353: 4155-4171
[9] Shen C L. On the Liouville transformation and inverse spectral problems[J]. Inverse Problems, 2005, 21: 519-614
[10] McLaughlin J R, Rundell W. A uniqueness theorem for an inverse Sturm-Liouville problem[J]. Journal of Mathematical Physics, 1987, 28: 1471-1472
[11] Horváth M. Inverse spectral problems and closed exponential systems[J]. Annals of Mathematica, 2005, 162: 885-918
[12] Titchmarsh E C. Eigenfunction Expansion Associated with Second Order Differential Equations[M]. Oxford: Oxford University Press, 1946
[13] 马娜蕊，傅守忠，魏广生. 一类Sturm-Liouville逆问题[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版)，2006, 37: 481-483

A New Proof for Borg-Levinson Theorem

FU Shou-zhong[1,2], XU Zong-ben[1], WEI Guang-sheng[1]

(1- Research Center for Applied Mathematics and Institute for Information and System Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049; 2- School of Computer, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061; 3-College of Mathematics and Information Science, Shannxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: The Borg-Levinson theorem describes that two spectra of the Sturm-Liouville operator uniquely determines the potential in the Sturm-Liouville eigenvalue inverse problem. In this paper, by using the Liouville theorem of entire functions and estimating asymptotic behavior of the elementary solutions of the Srurm-Liouville equation as the spectral parameter approaches to infinity, a simple proof is provided for the Borg-Levinson theorem. The equivalence relationship among two spectra, the Weyl-Titchmarsh m-function and spectral function is also established.

Keywords: eigenvalue; inverse problem; Sturm-Liouville operator